Indonesian Journal of Multidisciplinary on Social and Technology
Homepage: https://journal.ilmudata.co.id/index.php/ijmst
Vol. 4 No. 2 (2026) pp: 45-51
P-ISSN: 2986-6790, e-ISSN: 2986-6782

Analisis Matematis Metode Lagrange Dalam Optimasi Berkendala Serta Implementasinya Pada Keputusan Produksi UMKM

Ariani Situngkir[1], Dora Claudia Meliala[2], Evi Aiswara Rai[3], Olivia Nauli Stevani Purba[4], Teresia Situmeang[5], Yessy Yurun Tobing[6]
[1,2,3,4,5,6] Universitas Negeri Medan
e-mail: arianisitungkir@gmail.com[1], doraclaudia217@gmail.com[2], eviaiswararaisimanjuntak@gmail.com[3], olivian.spurba@gmail.com[4], teresiasitumeang17@gmail.com[5], yesyyurun@gmail.com[6]

Abstrak

Optimasi merupakan suatu metode untuk memperoleh hasil terbaik dengan memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya dalam suatu kondisi tertentu. Dalam praktiknya, banyak permasalahan optimasi melibatkan kendala sehingga diperlukan metode khusus untuk menyelesaikannya. Salah satu metode yang digunakan adalah metode pengali Lagrange. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis karakteristik metode Lagrange dalam menyelesaikan masalah optimasi berkendala. Metode yang digunakan adalah studi literatur berdasarkan jurnal ilmiah serta analisis matematis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode Lagrange mampu mentransformasikan masalah optimasi berkendala menjadi optimasi tanpa kendala melalui pembentukan fungsi Lagrange. Selain itu, metode ini efektif dalam menentukan titik ekstrem dengan menggunakan turunan parsial. Studi kasus pada UMKM menunjukkan bahwa metode ini dapat digunakan dalam menentukan kombinasi produksi optimal sehingga memberikan keuntungan maksimum.

Kata Kunci : *Optimasi, Lagrange, Fungsi Nonlinier, Kendala, Ekonomi*

Abstract

Optimization is a method for obtaining the best results by maximizing profits or minimizing costs under certain conditions. In practice, many optimization problems involve constraints, requiring special methods to solve them. One such method is the Lagrange multiplier method. This study aims to analyze the characteristics of the Lagrange method in solving constrained optimization problems. The methods used are literature studies based on scientific journals and mathematical analysis. The results show that the Lagrange method is capable of transforming constrained optimization problems into unconstrained optimization problems through the formation of Lagrange functions. In addition, this method is effective in determining extreme points using partial derivatives. Case studies on MSMEs show that this method can be used to determine optimal production combinations to provide maximum profits.

Keywords : *Optimization, Lagrange, Nonlinear Function, Constraints, Economics*

1. Pendahuluan

Dalam perkembangan ilmu ekonomi modern, pendekatan matematis memiliki peranan yang sangat penting dalam menganalisis berbagai fenomena ekonomi secara sistematis dan terukur. Matematika ekonomi digunakan sebagai alat untuk memodelkan hubungan antar variabel ekonomi, seperti hubungan antara produksi, biaya, keuntungan, serta keterbatasan sumber daya. Salah satu konsep utama dalam matematika ekonomi adalah optimasi, yaitu suatu proses untuk menentukan nilai terbaik dari suatu fungsi objektif dalam kondisi tertentu. Optimasi dalam ekonomi umumnya bertujuan untuk memaksimumkan keuntungan (profit maximization) atau meminimumkan biaya (cost minimization). Dalam praktiknya, permasalahan optimasi jarang terjadi tanpa kendala, karena setiap aktivitas ekonomi selalu dibatasi oleh keterbatasan sumber daya seperti modal, tenaga kerja, bahan baku, maupun kapasitas produksi. Oleh karena itu, konsep optimasi berkendala (constrained optimization) menjadi sangat relevan dalam analisis ekonomi. Secara matematis, masalah optimasi dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi objektif yang ingin dimaksimumkan atau diminimumkan, dengan satu atau lebih fungsi kendala yang harus dipenuhi. Permasalahan ini menjadi lebih kompleks ketika fungsi yang digunakan bersifat nonlinier dan melibatkan lebih dari satu variabel. Dalam kondisi tersebut, metode penyelesaian sederhana seperti substitusi sering kali tidak efektif, terutama ketika jumlah kendala lebih dari satu atau berbentuk pertidaksamaan. Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, dikembangkan berbagai metode optimasi dalam kajian matematika terapan, salah satunya adalah metode pengali Lagrange (Lagrange Multiplier). Metode ini diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange dan menjadi salah satu teknik yang paling banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan optimasi berkendala. Keunggulan utama metode ini adalah kemampuannya dalam mentransformasikan permasalahan optimasi berkendala menjadi permasalahan optimasi tanpa kendala dengan cara membentuk fungsi baru yang disebut fungsi Lagrange. Dalam metode ini, fungsi objektif digabungkan dengan fungsi kendala melalui suatu variabel tambahan yang disebut sebagai pengali Lagrange. Dengan demikian, solusi optimal dapat diperoleh melalui analisis turunan parsial terhadap fungsi Lagrange tersebut. Selain memberikan solusi matematis, metode ini juga memiliki interpretasi ekonomi yang penting, dimana nilai pengali Lagrange dapat diartikan sebagai nilai bayangan (shadow price), yaitu perubahan nilai fungsi objektif akibat perubahan pada kendala. Lebih lanjut, dalam konteks ekonomi nyata, khususnya pada sektor usaha kecil dan menengah (UMKM), permasalahan optimasi berkendala sering dijumpai dalam pengambilan keputusan produksi. Pelaku usaha harus menentukan kombinasi produksi yang optimal dengan mempertimbangkan keterbatasan biaya, tenaga kerja, maupun bahan baku. Dalam kondisi tersebut, penggunaan metode matematis seperti metode Lagrange dapat membantu dalam menentukan keputusan yang rasional dan optimal. Namun demikian, penerapan metode Lagrange juga memiliki beberapa keterbatasan. Salah satunya adalah metode ini tidak selalu menjamin diperolehnya solusi optimum global, terutama pada fungsi nonlinier yang kompleks. Selain itu, keberhasilan metode ini sangat bergantung pada identifikasi kendala yang aktif dalam sistem optimasi. Oleh karena itu, diperlukan analisis yang cermat dalam penerapannya agar solusi yang diperoleh benar-benar relevan dengan kondisi nyata. Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis secara mendalam karakteristik metode pengali Lagrange dalam menyelesaikan permasalahan optimasi berkendala, khususnya dalam konteks matematika ekonomi. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan untuk mengkaji penerapan metode tersebut dalam studi kasus nyata, sehingga dapat memberikan gambaran yang lebih konkret mengenai manfaat metode Lagrange dalam pengambilan keputusan ekonomi.

2. Tinjauan Pustaka

1) Konsep Dasar Optimasi dalam Matematika Ekonomi

Optimasi merupakan salah satu konsep fundamental dalam matematika ekonomi yang digunakan untuk menentukan keputusan terbaik dalam suatu sistem ekonomi. Secara umum, optimasi didefinisikan sebagai suatu proses untuk memperoleh nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi objektif dalam kondisi tertentu . Fungsi objektif tersebut biasanya merepresentasikan keuntungan, utilitas, atau biaya dalam suatu kegiatan ekonomi. Dalam konteks ekonomi, optimasi sering digunakan dalam berbagai bidang, seperti teori produksi, teori konsumsi, dan teori distribusi. Misalnya, perusahaan berusaha memaksimumkan keuntungan dengan menentukan jumlah produksi optimal, sedangkan konsumen berusaha memaksimumkan utilitas dengan keterbatasan anggaran. Secara matematis, model optimasi dapat dinyatakan sebagai:

Max f(x, y)

Minimisasi:
Min f(x, y)

dengan kendala:
g(x, y) = 0

dengan f sebagai fungsi objektif dan x_i sebagai variabel keputusan.

DOI: https://doi.org/10.69693/ijmst.v4i2.8014

2) Optimasi Tanpa Kendala dan Dengan Kendala

Permasalahan optimasi dalam matematika ekonomi dapat dibedakan menjadi dua jenis utama, yaitu optimasi tanpa kendala dan optimasi dengan kendala .

a. Optimasi Tanpa Kendala

Optimasi tanpa kendala adalah permasalahan optimasi yang tidak memiliki batasan tertentu terhadap variabel keputusan. Solusi optimal diperoleh dengan mencari titik stasioner, yaitu titik dimana turunan parsial pertama sama dengan nol:

$$\boxed{\begin{array}{c} \partial f/\partial x = 0 \\ \partial f/\partial y = 0 \end{array}}$$

Metode ini relatif sederhana, namun kurang realistis dalam konteks ekonomi karena jarang terdapat kondisi tanpa batasan.

b. Optimasi Dengan Kendala

Optimasi dengan kendala adalah permasalahan optimasi yang melibatkan satu atau lebih fungsi pembatas. Kendala tersebut dapat berupa:

Kendala kesamaan:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Kendala pertidaksamaan:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

Dalam praktik ekonomi, kendala ini dapat berupa keterbatasan modal, bahan baku, atau kapasitas produksi. Oleh karena itu, optimasi berkendala lebih sering digunakan dalam analisis ekonomi nyata.

3) Titik Kritis dan Kondisi Optimal

Untuk menentukan solusi optimal, diperlukan analisis terhadap titik kritis dari fungsi objektif. Titik kritis adalah titik dimana turunan parsial pertama sama dengan nol atau tidak terdefinisi .

a. Syarat Perlu (First Order Condition)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

b. Syarat Cukup (Second Order Condition)

$$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Interpretasi:
$D > 0$dan $f_{xx} > 0$→ minimum lokal
$D > 0$dan $f_{xx} < 0$→ maksimum lokal
$D < 0$→ titik pelana
Analisis ini penting untuk memastikan bahwa solusi yang diperoleh benar-benar merupakan nilai optimal.

1) Metode Pengali Lagrange

Metode pengali Lagrange digunakan untuk menyelesaikan optimasi berkendala dengan menggabungkan fungsi objektif dan kendala ke dalam satu fungsi Metode pengali Lagrange dirumuskan sebagai:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

Syarat optimal:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

DOI: https://doi.org/10.69693/ijmst.v4i2.8014

Metode ini efektif karena mengubah masalah berkendala menjadi tanpa kendala.

2) Interpretasi Ekonomi

Dalam ekonomi, pengali Lagrange (λ) memiliki arti sebagai **shadow price**, yaitu perubahan nilai fungsi objektif akibat perubahan kendala:

$$\lambda = \frac{\partial f^*}{\partial M}$$

Nilai ini menunjukkan pentingnya sumber daya dalam proses produksi.

3) Fungsi Nonlinier dalam Ekonomi

Fungsi nonlinier digunakan untuk menggambarkan kondisi nyata seperti penurunan efisiensi produksi (*diminishing return*). Bentuk umum:

$$f(x) = ax - bx^2$$

Fungsi ini banyak digunakan dalam analisis keuntungan dan produksi.

3. Metode Penelitian

1) Jenis dan Sumber Data

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif dengan analisis matematis. Pendekatan ini bertujuan untuk mengkaji penerapan metode pengali Lagrange dalam menyelesaikan masalah optimasi berkendala.

Data yang digunakan merupakan data sekunder yang diperoleh dari:

1. Jurnal ilmiah terkait optimasi dan metode Lagrange
2. Buku matematika ekonomi
3. Literatur pendukung lainnya

Sumber utama penelitian ini adalah jurnal yang membahas karakteristik metode pengali Lagrange dalam optimasi berkendala .

a) Teknik Analisis Data

Analisis dilakukan dengan pendekatan matematis melalui beberapa tahapan berikut:

b) Pembentukan fungsi Lagrange dilakukan dengan menggabungkan fungsi objektif dan fungsi kendala sebagai berikut:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

c) Penentuan kondisi optimal dilakukan dengan turunan parsial:

$$\partial \mathrm{L}/\partial \mathrm{x} = 0$$
$$\partial \mathrm{L}/\partial \mathrm{y} = 0$$
$$\partial \mathrm{L}/\partial \lambda = 0$$

Sistem persamaan yang dihasilkan kemudian diselesaikan untuk memperoleh nilai optimal variabel keputusan.

d) Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian dilakukan secara sistematis sebagai berikut:

1. Mengkaji teori optimasi dan metode Lagrange
2. Menyusun model matematis optimasi berkendala
3. Menerapkan metode Lagrange pada model
4. Menganalisis hasil perhitungan
5. Menginterpretasikan hasil dalam konteks ekonom

4. Hasil & Pembahasan

DOI: https://doi.org/10.69693/ijmst.v4i2.8014

Berdasarkan analisis metode pengali Lagrange, permasalahan optimasi berkendala dapat diselesaikan dengan menggabungkan fungsi objektif dan fungsi kendala ke dalam satu fungsi Lagrange. Dalam konteks penelitian ini, tujuan utama adalah memaksimumkan keuntungan produksi dengan keterbatasan biaya. Model matematis dirumuskan sebagai berikut:

$$Fungsi\ objektif: f(x,y) = 40x + 30y - x^2 - y^2$$

$$Fungsi\ kendala: 2x + y = 20$$

dengan syarat optimal:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Metode ini memungkinkan permasalahan optimasi berkendala diubah menjadi sistem persamaan yang dapat diselesaikan secara simultan, sehingga titik optimal dapat ditentukan secara matematis. Permasalahan nyata yang sering terjadi, khususnya pada UMKM di Medan, adalah keterbatasan biaya produksi yang menyebabkan pelaku usaha tidak dapat memproduksi barang secara bebas. Sebagai contoh, sebuah UMKM roti menghadapi dilema dalam menentukan jumlah produksi roti coklat (x) dan roti keju (y) agar keuntungan maksimum tercapai, namun tetap berada dalam batas biaya yang tersedia. Fungsi keuntungan yang digunakan adalah fungsi nonlinier:

$$\pi(x,y) = 40x + 30y - x^2 - y^2$$

yang mencerminkan kondisi nyata dimana peningkatan produksi secara berlebihan menyebabkan penurunan efisiensi (*diminishing return*). Kendala biaya dinyatakan sebagai:

$$2x + y = 20$$

yang menunjukkan keterbatasan sumber daya produksi. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut digunakan metode pengali Lagrange dengan membentuk fungsi:

$$L(x,y,\lambda) = 40x + 30y - x^2 - y^2 + \lambda(20 - 2x - y)$$

Selanjutnya, dilakukan turunan parsial terhadap masing-masing variable:

$$\partial L/\partial x = 40 - 2x - 2\lambda = 0$$

$$\partial L/\partial y = 30 - 2y - \lambda = 0$$

$$\partial L/\partial \lambda = 20 - 2x - y = 0$$

Dari persamaan pertama dan kedua diperoleh:

$$x = 20 - \lambda$$

$$y = (30 - \lambda)/2$$

DOI: https://doi.org/10.69693/ijmst.v4i2.8014

diperoleh solusi optimal $x = 6$dan $y = 8$. Hal ini berarti bahwa untuk memaksimumkan keuntungan dalam kondisi keterbatasan biaya, UMKM tersebut sebaiknya memproduksi 6 unit roti coklat dan 8 unit roti keju. Nilai keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

Substitusi ke dalam fungsi kendala:

$2(20 - \lambda) + (30 - \lambda)/2 = 20$

$40 - 2\lambda + (30 - \lambda)/2 = 20$

Kalikan 2:
$80 - 4\lambda + 30 - \lambda = 40$

$110 - 5\lambda = 40$
$5\lambda = 70$
$\lambda = 14$
Substitusi kembali:
$x = 20 - 14 = 6$
$y = (30 - 14)/2 = 8$
Dengan demikian diperoleh solusi optimal yaitu x = 6 dan y = 8.
Nilai keuntungan maksimum:
$f(6,8) = 40(6) + 30(8) - 6^2 - 8^2$
$= 240 + 240 - 36 - 64$
$= 380$

Hasil ini menunjukkan bahwa kombinasi produksi optimal adalah 6 unit roti coklat dan 8 unit roti keju dengan keuntungan maksimum sebesar 380 satuan.
Nilai $\lambda = 14$ menunjukkan bahwa setiap tambahan satu unit sumber daya akan meningkatkan keuntungan sebesar 14 satuan. Hal ini dikenal sebagai shadow price dalam teori ekonomi.
Dengan demikian, metode Lagrange tidak hanya memberikan solusi matematis, tetapi juga memberikan interpretasi ekonomi yang penting dalam pengambilan keputusan produksi..

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa metode pengali Lagrange merupakan salah satu metode yang efektif dalam menyelesaikan permasalahan optimasi berkendala dalam matematika ekonomi. Metode ini bekerja dengan mentransformasikan fungsi objektif dan fungsi kendala ke dalam satu fungsi Lagrange, sehingga permasalahan optimasi yang semula kompleks dapat disederhanakan menjadi sistem persamaan yang dapat diselesaikan melalui turunan parsial. Dengan demikian, metode ini mampu menentukan titik optimal secara sistematis melalui kondisi stasioner. Secara teoritis, metode pengali Lagrange memiliki beberapa karakteristik penting, yaitu mampu menangani fungsi nonlinier, dapat digunakan pada lebih dari satu kendala, serta memberikan solusi melalui pendekatan aljabar. Selain itu, metode ini juga memiliki kelemahan, yaitu tidak selalu menjamin diperolehnya solusi optimum global, sehingga diperlukan analisis lanjutan terhadap kondisi fungsi. Berdasarkan penerapan pada studi kasus UMKM produksi roti di Medan, diperoleh bahwa kombinasi produksi optimal adalah 6 unit roti coklat dan 8 unit roti keju dengan keuntungan maksimum sebesar 380 satuan. Hasil ini menunjukkan bahwa metode pengali Lagrange mampu memberikan solusi yang relevan dan aplikatif dalam permasalahan nyata, khususnya dalam pengambilan keputusan produksi dengan keterbatasan biaya. Selain itu, nilai pengali Lagrange yang diperoleh memiliki interpretasi ekonomi sebagai *shadow price*, yaitu menunjukkan besarnya tambahan keuntungan yang dapat diperoleh apabila sumber daya ditingkatkan. Hal ini memberikan informasi penting bagi pelaku usaha dalam menentukan kebijakan produksi dan pengelolaan sumber daya secara lebih efisien. Dengan demikian, metode pengali Lagrange terbukti tidak hanya relevan secara teoritis dalam matematika ekonomi lanjutan, tetapi juga aplikatif dalam mendukung pengambilan keputusan produksi yang optimal pada sektor UMKM.

6. Daftar Pustaka

Manik, T. M. (2018). Analisis Karakteristik Fungsi Lagrange dalam Menyelesaikan Permasalahan Optimasi Berkendala. TALENTA Conference Series.

Setiawan, A., & Ernawati, D. (2023). Penerapan Metode Lagrange Multiplier untuk Meminimalkan Biaya Persediaan Material Plat di PT. PAL Indonesia (Persero). Briliant: Jurnal Riset dan Konseptual. https://doi.org/10.28926/briliant.v8i3.1461

DOI: https://doi.org/10.69693/ijmst.v4i2.8014

Isro'ah, N. A., Widyaningrum, D., & Ismiyah, E. (2022). Penerapan EOQ Model Lagrange Multiplier untuk Menentukan Persediaan Bahan Baku Optimal. JUSTI (Jurnal Sistem dan Teknik Industri), 2(3), 392–402. https://doi.org/10.30587/justicb.v2i3.3837

Jannah, S. M., Hasibuan, A. K., Sitompul, S. R., Halvin, M., & Junaidi, L. D. (2025). Optimalisasi Laba Perusahaan dengan Pendekatan Metode Lagrange pada Coffee Shop. Warta Dharmawangsa. https://doi.org/10.46576/wdw.v19i3.7125

Muhammad, A., et al. (2024). Debt Ratio Optimization Using Lagrange Method. Forum Ekonomi. https://doi.org/10.30872/jfor.v27i1/4449

Tanjung, W. N., & Juanita, T. (2020). Optimasi Penyusunan Anggaran Penjualan Menggunakan Lagrange Multiplier. Jurnal Al-Azhar Indonesia Seri Sains dan Teknologi.

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2017). Fundamental Methods of Mathematical Economics (4th ed.). McGraw-Hill.

Sydsaeter, K., Hammond, P., Strom, A., & Carvajal, A. (2018). Essential Mathematics for Economic Analysis (5th ed.). Pearson.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2003). Calculus. Erlangga.

Varian, H. R. (2019). Intermediate Microeconomics: A Modern Approach (9th ed.). W.W. Norton & Company.

Nicholson, W., & Snyder, C. (2017). Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions (12th ed.). Cengage Learning.

Silberberg, E., & Suen, W. (2001). The Structure of Economics: A Mathematical Analysis (3rd ed.). McGraw-Hill.

Simon, C. P., & Blume, L. (1994). Mathematics for Economists. W.W. Norton & Company.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2016). Linear and Nonlinear Programming (4th ed.). Springer.

Intriligator, M. D. (2002). Mathematical Optimization and Economic Theory. SIAM.

Sundaram, R. K. (1996). A First Course in Optimization Theory. Cambridge University Presss.

DOI: https://doi.org/10.69693/ijmst.v4i2.8014