



Perbandingan MANOVA Klasik dan Robust untuk Disparitas Komponen IPM Wilayah Sumatera Utara

Laura Annisa Purba, Christiani Joice Siallagan, Nazla Dia Maharani, Aura Patresia Br Naibaho
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan
prbalaurea2@gmail.com, christianisiallagan562@gmail.com*, nazladia.4243260049@mhs.unimed.ac.id,
aurapatresia2022@gmail.com

Abstrak

Disparitas pembangunan manusia antarwilayah di Sumatera Utara umumnya dinilai melalui Indeks Pembangunan Manusia (IPM) komposit yang dapat menyembunyikan perbedaan pada komponen penyusunnya. Analisis ragam multivariat (MANOVA) klasik menguji perbedaan tersebut secara simultan, tetapi validitasnya dapat terpengaruh oleh ketidaknormalan dan pencilan multivariat. Penelitian ini bertujuan untuk menguji perbedaan empat komponen IPM (umur harapan hidup, harapan lama sekolah, rata-rata lama sekolah, dan pengeluaran per kapita yang disesuaikan) pada tiga wilayah geografis Sumatera Utara serta untuk membandingkan ketahanan MANOVA klasik dengan alternatif berbasis peringkat dan permutasi. Data 33 kabupaten/kota tahun 2023–2025 dianalisis menggunakan deteksi pencilan jarak Mahalanobis dan Minimum Covariance Determinant, uji asumsi, serta simulasi Monte Carlo kontaminasi. Normalitas multivariat dilanggar pada seluruh tahun dan Kota Medan menjadi pencilan dalam kelompok yang konsisten. MANOVA klasik menunjukkan perbedaan antarwilayah yang sangat signifikan (Wilks' Lambda = 0,146; $p < 0,001$; η^2 parsial = 0,618 pada 2025), terutama didorong oleh rata-rata lama sekolah dan pengeluaran, dengan Kepulauan Nias terendah. Uji berbasis peringkat, uji permutasi, dan data tanpa pencilan memberikan kesimpulan yang sama. Simulasi tidak menunjukkan keunggulan konsisten pendekatan berbasis peringkat karena ukuran efek yang besar menjaga kekuatan uji klasik. Kesenjangan relatif pengeluaran dan pendidikan sedikit menyempit, tetapi kesenjangan nominal pengeluaran melebar dari Rp5,00 juta menjadi Rp5,10 juta.

Kata kunci: Indeks Pembangunan Manusia, MANOVA, Pencilan Multivariat, Uji Permutasi, Disparitas Wilayah

Abstract

Human development disparities among regions in North Sumatra are often assessed through the composite Human Development Index (HDI), which can hide differences in its constituent components. Classical multivariate analysis of variance (MANOVA) tests such differences simultaneously, but its validity may be affected by non-normality and multivariate outliers. This study aims to test differences in four HDI components (life expectancy, expected years of schooling, mean years of schooling, and adjusted per capita expenditure) among three geographic regions of North Sumatra and to compare the robustness of classical MANOVA with rank-based and permutation alternatives. Data from 33 regencies/municipalities for 2023–2025 were analyzed using Mahalanobis distance and Minimum Covariance Determinant outlier detection, assumption tests, and Monte Carlo contamination simulations. Multivariate normality was violated in all years, and Medan City was a consistent within-group outlier. Classical MANOVA showed highly significant regional differences (Wilks' Lambda = 0.146, $p < 0.001$; partial $\eta^2 = 0.618$ in 2025), driven mainly by mean years of schooling and expenditure, with the Nias Islands lowest. Rank-based tests, permutation tests, and data without outliers led to the same conclusion. The simulations showed no consistent advantage of the rank-based approach, because the large effect size kept the classical test powerful. The relative gap in expenditure and schooling narrowed slightly over the three years, but the nominal expenditure gap widened from Rp5.00 million to Rp5.10 million.

Keywords: Human Development Index, MANOVA, Multivariate Outliers, Permutation Test, Regional Disparity

1. Pendahuluan

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) merupakan indikator penting karena mencerminkan kemajuan di bidang sosial, ekonomi, budaya, politik, dan lingkungan, serta banyak digunakan untuk menggambarkan keberhasilan pembangunan manusia (Nurlina et al., 2023). Keberhasilan pembangunan tidak hanya ditentukan oleh pertumbuhan ekonomi, tetapi juga oleh peningkatan kualitas kesehatan, pendidikan, dan standar hidup masyarakat. IPM diukur dengan empat indikator: umur harapan hidup saat lahir (UHH) yang mewakili umur panjang dan hidup sehat; harapan lama sekolah (HLS) dan rata-rata lama sekolah (RLS) yang mewakili dimensi pengetahuan; serta

pengeluaran riil per kapita yang disesuaikan yang mewakili standar hidup layak. Keempat indikator ini menggambarkan kualitas hidup masyarakat dari sudut pandang yang berbeda sehingga perlu dipertimbangkan bersama dalam menilai pembangunan manusia. Badan Pusat Statistik (BPS) menjelaskan bahwa data IPM beserta komponennya dapat digunakan untuk menelaah capaian pembangunan dan disparitas antarwilayah. Oleh karena itu, analisis komponen IPM penting untuk memperoleh pemahaman yang lebih komprehensif tentang pembangunan manusia di suatu wilayah (Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara, 2025b).

Disparitas merupakan masalah pembangunan manusia yang masih menjadi perhatian dalam pembangunan daerah, termasuk di Provinsi Sumatera Utara. Berdasarkan data BPS, IPM Sumatera Utara mencapai 75,76 pada 2024, naik dari 75,13 pada 2023. Namun, capaian tingkat provinsi tidak sepenuhnya menggambarkan kondisi setiap kabupaten/kota. Pada 2024, IPM Kota Medan mencapai 83,23, sedangkan IPM Kabupaten Nias Barat hanya 65,66. Perbedaan ini menunjukkan adanya kesenjangan capaian pembangunan manusia antarwilayah yang perlu dikaji melalui komponen penyusunnya, bukan hanya melalui nilai IPM keseluruhan (Badan Pusat Statistik Kabupaten Nias Barat, 2024; Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara, 2025b). Perbedaan kondisi geografis, akses terhadap fasilitas pendidikan dan kesehatan, serta peluang ekonomi merupakan konteks penting untuk memahami variasi pembangunan manusia. Oleh karena itu, diperlukan analisis statistik untuk menguji apakah komponen pembangunan manusia berbeda antarkelompok wilayah geografis di Sumatera Utara.

Penelitian terdahulu telah mengkaji pembangunan manusia dengan berbagai pendekatan statistik. Sofia (2023) mengelompokkan kabupaten/kota berdasarkan indikator IPM 2022 menggunakan metode *K-Harmonic Means clustering* dan menunjukkan bahwa wilayah dapat dikelompokkan menurut kemiripan indikator pembangunan manusianya. Hartanto et al. (2024) menggunakan metode *Fuzzy C-Means* untuk mengelompokkan kabupaten/kota di Jawa Timur berdasarkan indikator IPM. Kedua penelitian menunjukkan bahwa analisis beberapa indikator secara simultan dapat membantu menjelaskan keragaman pembangunan manusia antarwilayah. Namun, metode pengelompokan berfokus pada kemiripan karakteristik wilayah dan tidak secara langsung menguji perbedaan pada beberapa variabel secara simultan. Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA), yaitu metode statistik untuk menguji perbedaan rata-rata beberapa variabel respons antarkelompok yang dibandingkan.

Dalam praktiknya, MANOVA klasik bertumpu pada beberapa asumsi yang perlu diperhatikan, yaitu normalitas multivariat, homogenitas matriks kovarians, dan independensi pengamatan. Metode ini memungkinkan UHH, HLS, RLS, dan pengeluaran riil per kapita yang disesuaikan dianalisis secara simultan pada kelompok wilayah geografis, yang diperlukan karena keempat indikator menggambarkan dimensi pembangunan manusia yang berbeda tetapi saling melengkapi. Namun, hasil MANOVA klasik dapat dipengaruhi oleh pencilan multivariat, yaitu pengamatan dengan kombinasi nilai yang tidak lazim dibandingkan pengamatan lainnya. Raji et al. (2021) membahas penggunaan penduga robust dan jarak Mahalanobis untuk mendeteksi pencilan multivariat, yang menegaskan pentingnya memperhatikan pengamatan ekstrem dalam analisis yang melibatkan banyak variabel. Apabila pencilan tidak ditangani dengan tepat, penduga parameter dan matriks kovarians dapat terpengaruh sehingga hasil uji perbedaan antarkelompok dapat berubah.

Salah satu pendekatan untuk masalah ini adalah MANOVA robust. Secara umum, metode robust dirancang agar hasil pendugaan atau pengujian tidak terlalu dipengaruhi oleh sejumlah pengamatan ekstrem. Baumeister et al. (2024) mengusulkan MANOVA berbasis kuantil sebagai alternatif pendekatan multivariat yang menggunakan kuantil, termasuk median, sehingga inferensi tidak hanya berfokus pada rata-rata. Meskipun pendekatan ini tidak mewakili semua jenis MANOVA robust, pendekatan tersebut mendukung pentingnya mempertimbangkan metode alternatif ketika karakteristik data menyulitkan pendekatan klasik. Dengan membandingkan MANOVA klasik dengan prosedur robust, suatu penelitian dapat mengevaluasi apakah kesimpulan tentang perbedaan komponen pembangunan manusia tetap konsisten atau berubah ketika pencilan diperhitungkan (Baumeister et al., 2024; Raji et al., 2021).

Berdasarkan penelitian terdahulu tersebut, kajian pembangunan manusia telah menggunakan metode pengelompokan untuk menggambarkan karakteristik wilayah, sedangkan kajian metodologis membahas analisis multivariat alternatif dan penanganan pencilan. Namun, belum ditemukan penelitian yang secara langsung menggabungkan konteks Sumatera Utara, empat komponen IPM, dan perbandingan ketahanan kedua pendekatan. Kebaruan penelitian ini terletak pada perbandingan kedua pendekatan dalam menganalisis UHH, HLS, RLS, dan pengeluaran riil per kapita yang disesuaikan di kabupaten/kota Sumatera Utara, serta evaluasi pengaruh pencilan terhadap hasil uji. Penelitian ini bertujuan menguji perbedaan komponen pembangunan manusia antarkelompok

wilayah geografis di Sumatera Utara, membandingkan hasil MANOVA klasik dengan MANOVA robust, dan mengevaluasi ketahanan kesimpulan statistik ketika terdapat pencilan.

2. Metode Penelitian

2.1. Jenis dan Rancangan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif komparatif dengan data sekunder, dilengkapi studi simulasi Monte Carlo. Analisis memiliki dua tujuan. Tujuan pertama adalah menguji apakah vektor rata-rata komponen pembangunan manusia berbeda antarwilayah geografis di Sumatera Utara dan mengukur besarnya disparitas. Tujuan kedua adalah membandingkan ketahanan MANOVA klasik dengan prosedur yang tidak bergantung pada asumsi normalitas, yaitu uji Wilks' Lambda berbasis peringkat dan uji permutasi, pada kondisi adanya pencilan.

MANOVA dipilih karena menguji perbedaan rata-rata beberapa variabel respons secara simultan dengan memperhitungkan korelasi antarvariabel (Furr, 2026). Pendekatan ini juga telah digunakan untuk membandingkan kelompok wilayah pada beberapa indikator sekaligus, misalnya dalam membandingkan kinerja energi antarkawasan komunitas di Dubai (Als Salman et al., 2025). Rancangan simulasi mengikuti pendekatan perbandingan netral untuk uji multivariat ketika asumsi distribusi tidak terpenuhi (Geroldinger et al., 2026).

2.2. Data dan Variabel Penelitian

Data berupa komponen Indeks Pembangunan Manusia (IPM) 33 kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Utara tahun 2023, 2024, dan 2025. Data diambil dari Berita Resmi Statistik BPS Provinsi Sumatera Utara No. 70/11/12/Th. XXVIII tanggal 5 November 2025 (Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara, 2025a). Analisis rinci menggunakan data 2025, sedangkan data 2023 dan 2024 berfungsi sebagai replikasi untuk menilai konsistensi hasil antartahun. IPM mengukur capaian pembangunan manusia pada tiga dimensi dasar, yaitu umur panjang dan hidup sehat, pengetahuan, serta standar hidup layak (Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara, 2025a; United Nations Development Programme, 2025).

Variabel respons adalah empat komponen IPM, sedangkan faktor yang dibandingkan adalah wilayah geografis (Tabel 1). IPM komposit tidak digunakan sebagai variabel respons karena dihitung dari keempat komponen tersebut sehingga penyertaannya akan menimbulkan ketergantungan fungsional antarvariabel.

Tabel 1. Variabel Penelitian

Kode	Variabel	Satuan	Dimensi IPM
Y1	Umur harapan hidup saat lahir (UHH)	Tahun	Umur panjang dan hidup sehat
Y2	Harapan lama sekolah (HLS)	Tahun	Pengetahuan
Y3	Rata-rata lama sekolah (RLS)	Tahun	Pengetahuan
Y4	Pengeluaran riil per kapita disesuaikan per tahun (Pengeluaran)	Ribu rupiah	Standar hidup layak

Kabupaten/kota dikelompokkan menjadi tiga wilayah geografis menurut letaknya di Sumatera Utara, yaitu Pantai Timur ($n = 12$), Barat dan Pedalaman ($n = 16$), serta Kepulauan Nias ($n = 5$). Anggota setiap wilayah disajikan pada Tabel 2. Ukuran kelompok tidak seimbang dan kelompok terkecil hanya memiliki lima pengamatan, yang menjadi pertimbangan dalam memilih metode robust pada Subbab 2.7.

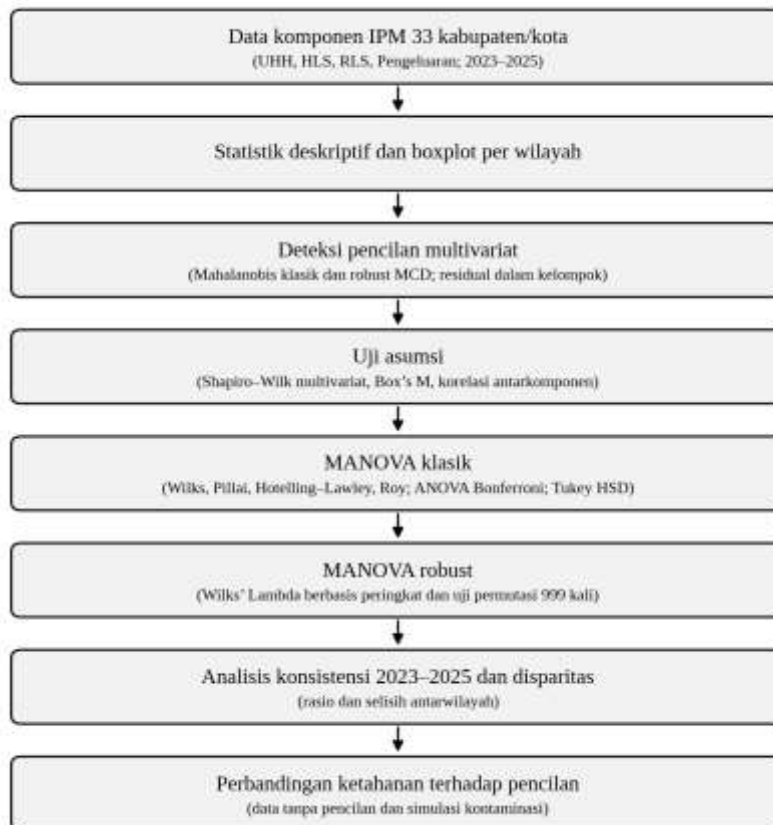
Tabel 2. Pengelompokan Kabupaten/Kota menurut Wilayah Geografis

Wilayah	n	Kabupaten/Kota
Pantai Timur	12	Labuhanbatu, Labuhanbatu Selatan, Labuhanbatu Utara, Asahan, Batu Bara, Deli Serdang, Serdang Bedagai, Langkat, Kota Tanjungbalai, Kota Tebing Tinggi, Kota Medan, Kota Binjai
Barat dan Pedalaman	16	Mandailing Natal, Tapanuli Selatan, Tapanuli Tengah, Tapanuli Utara, Toba, Simalungun, Dairi, Karo, Humbang Hasundutan, Pakpak Bharat, Samosir, Padang Lawas Utara, Padang Lawas, Kota Sibolga, Kota Pematangsiantar, Kota Padangsidimpuan
Kepulauan Nias	5	Nias, Nias Selatan, Nias Utara, Nias Barat, Kota Gunungsitoli

2.3. Tahapan Analisis dan Eksplorasi Data

Seluruh analisis dilakukan menggunakan R (R Core Team, 2025) pada taraf signifikansi $\alpha = 0,05$ kecuali dinyatakan lain. Tahapan analisis diringkas pada Gambar 1 dan diuraikan pada subbab berikut. Tahap inferensial diulang untuk data 2023, 2024, dan 2025 guna menilai konsistensi hasil.

Pada tahap eksplorasi, data setiap wilayah diringkas dengan rata-rata dan simpangan baku setiap komponen IPM. Sebaran dan pencilan univariat divisualisasikan dengan diagram kotak-garis (*boxplot*) per wilayah, dengan titik pencilan ditentukan menggunakan aturan $1,5 \times$ rentang antarkuartil. Kabupaten/kota yang merupakan pencilan univariat diidentifikasi dengan mencocokkan nilai pada *boxplot* dengan data asli.



Gambar 1. Alur Tahapan Analisis Penelitian

2.4. Deteksi Pencilan Multivariat

Pencilan multivariat dideteksi menggunakan jarak Mahalanobis kuadrat,

$$d_i^2 = (y_i - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1} (y_i - \hat{\mu}) \quad (1)$$

dengan y_i adalah vektor empat komponen IPM untuk pengamatan ke- i , serta $\hat{\mu}$ dan $\hat{\Sigma}$ masing-masing adalah penduga vektor rata-rata dan matriks kovarians. Pada jarak Mahalanobis klasik, kedua penduga dihitung dari rata-rata dan kovarians sampel yang mudah tertarik oleh pencilan. Pada jarak robust, kedua penduga diperoleh dari *Minimum Covariance Determinant* (MCD), yang mencari subhimpunan pengamatan dengan determinan matriks kovarians terkecil sehingga tidak terpengaruh oleh pengamatan yang menyimpang (Ameen & Abbas, 2022; Bulut, 2026). Suatu pengamatan dinyatakan sebagai pencilan multivariat apabila d_i^2 melebihi nilai kritis $\chi^2(0,975; p)$ dengan $p = 4$ variabel, yaitu 11,14.

Deteksi dilakukan pada dua tingkat. Tingkat pertama menggunakan seluruh data untuk mengidentifikasi kabupaten/kota yang jauh dari pusat data secara keseluruhan. Tingkat kedua menggunakan residual model MANOVA, yaitu selisih antara setiap pengamatan dan rata-rata wilayahnya, karena MANOVA membandingkan rata-rata antarkelompok sehingga perbedaan yang memang berasal dari wilayah tidak boleh dianggap pencilan. Kabupaten/kota yang terdeteksi tidak otomatis dianggap sebagai kesalahan data. Analisis utama tetap menggunakan data asli, sedangkan data tanpa pencilan dalam kelompok digunakan sebagai analisis sensitivitas pada Subbab 2.9.

2.5. Pengujian Asumsi

Asumsi yang diperiksa sebelum MANOVA klasik meliputi tiga hal. Pertama, normalitas multivariat residual diuji dengan uji Shapiro–Wilk multivariat dengan hipotesis nol bahwa residual model mengikuti distribusi normal multivariat. Kedua, homogenitas matriks kovarians antarwilayah diuji dengan uji Box’s M yang mengikuti pendekatan distribusi khi-kuadrat. Uji ini sensitif terhadap pelanggaran normalitas dan pencilan, sedangkan kesamaan matriks kovarians merupakan salah satu asumsi penting MANOVA (Bulut, 2025). Oleh karena itu, nilai- p yang mendekati ambang 0,05 diinterpretasikan dengan hati-hati. Ketiga, multikolinearitas diperiksa melalui matriks korelasi antarkomponen IPM, dengan korelasi yang sangat tinggi, umumnya di atas 0,90, menunjukkan multikolinearitas serius.

Asumsi independensi dianggap terpenuhi karena setiap kabupaten/kota merupakan satu unit pengamatan. Ketergantungan spasial antarkabupaten/kota yang berdekatan mungkin ada tetapi tidak dimodelkan dalam penelitian ini. Pelanggaran normalitas multivariat menjadi dasar untuk membandingkan MANOVA klasik dengan prosedur yang tidak bergantung pada asumsi tersebut.

2.6. MANOVA Klasik

Model MANOVA satu arah untuk membandingkan $g = 3$ wilayah dengan $p = 4$ variabel respons adalah

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

dengan y_{ij} adalah vektor respons pengamatan ke- j pada wilayah ke- i , μ adalah vektor rata-rata keseluruhan, τ_i adalah efek wilayah ke- i , dan ε_{ij} adalah galat yang diasumsikan mengikuti distribusi normal multivariat dengan matriks kovarians yang sama antarwilayah. Hipotesis yang diuji adalah H_0 : vektor rata-rata komponen IPM sama pada ketiga wilayah, melawan H_1 : sedikitnya satu wilayah memiliki vektor rata-rata berbeda.

Empat statistik uji digunakan, yaitu Wilks’ Lambda, Pillai’s Trace, Hotelling–Lawley Trace, dan Roy’s Largest Root. Jika $\mathbf{H}$ dan $\mathbf{E}$ masing-masing adalah matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang antarkelompok dan dalam kelompok, maka

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}|} \quad (3)$$

$$V = \sum_{k=1}^s \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \quad (4)$$

$$U = \sum_{k=1}^s \lambda_k \quad (5)$$

dengan λ_k adalah nilai eigen ke- k dari $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$ dan $s = \min(p, g - 1) = 2$. Persamaan (3) sampai (5) berturut-turut adalah Wilks’ Lambda (Λ), Pillai’s Trace (V), dan Hotelling–Lawley Trace (U), sedangkan Roy’s Largest Root menggunakan nilai eigen terbesar, λ_1 . Nilai- p diperoleh dari pendekatan F untuk setiap statistik. Ukuran efek multivariat dinyatakan sebagai η^2 parsial yang dihitung dari Wilks’ Lambda,

$$\eta_p^2 = 1 - \Lambda^{1/s} \quad (6)$$

Jika uji multivariat signifikan, perbedaan ditelusuri melalui analisis ragam univariat pada setiap komponen dengan koreksi Bonferroni, yaitu taraf signifikansi $\alpha^* = 0,05/4 = 0,0125$. Komponen yang signifikan dilanjutkan dengan uji Tukey HSD untuk mengidentifikasi pasangan wilayah yang berbeda.

2.7. MANOVA Robust dan Uji Permutasi

Statistik Wilks' Lambda klasik dihitung dari penduga kovarians yang sangat sensitif terhadap pencilan sehingga banyak penelitian mengembangkan versi robust yang menggunakan penduga MCD (Ameen & Abbas, 2022; Bulut, 2026). Versi robust per kelompok tersebut mensyaratkan setiap kelompok cukup besar relatif terhadap jumlah variabel. Kelompok Kepulauan Nias hanya memiliki lima pengamatan, sama dengan jumlah variabel ditambah satu ($n = p + 1$), sehingga penduga MCD per kelompok tidak dapat diterapkan pada data ini. Dua prosedur yang tidak bergantung pada normalitas digunakan sebagai alternatif.

Prosedur pertama adalah uji Wilks' Lambda berbasis peringkat. Setiap komponen IPM diubah menjadi peringkat di antara seluruh 33 pengamatan, kemudian MANOVA dan statistik Wilks' Lambda dihitung pada peringkat tersebut. Transformasi peringkat mengurangi pengaruh nilai ekstrem, dan prosedur berbasis peringkat tidak memerlukan asumsi distribusi yang ketat (Amro et al., 2024). Prosedur kedua adalah uji permutasi. Label wilayah diacak sebanyak $B = 999$ kali dan statistik Wilks' Lambda dihitung ulang pada setiap pengacakan, baik untuk data asli (permutasi klasik) maupun untuk peringkat (permutasi berbasis peringkat). Distribusi nol diperoleh dari pengacakan sehingga tidak bergantung pada normalitas (Bu et al., 2026; Sabbioni et al., 2025). Karena nilai Λ yang kecil mendukung penolakan H_0 , nilai- p dihitung sebagai

$$p_{\text{perm}} = \frac{1 + \sum_{b=1}^B I(\Lambda_b^* \leq \Lambda_{\text{obs}})}{B+1} \quad (7)$$

dengan $I(\cdot)$ adalah fungsi indikator, Λ_b^* adalah statistik pada permutasi ke- b , dan Λ_{obs} adalah statistik pada data teramati. Dengan $B = 999$, nilai- p terkecil yang dapat dicapai adalah 0,001. Nilai Wilks' Lambda klasik dan berbasis peringkat tidak dibandingkan langsung karena berada pada skala yang berbeda. Perbandingan dilakukan melalui kesimpulan uji dan nilai- p .

2.8. Konsistensi Tiga Tahun dan Pengukuran Disparitas

Seluruh uji pada Subbab 2.6 dan 2.7 diulang untuk data 2023, 2024, dan 2025. Kesimpulan dinyatakan konsisten apabila arah keputusan uji dan ukuran efek multivariat serupa pada ketiga tahun.

Disparitas antarwilayah diukur untuk setiap komponen dan setiap tahun dari rata-rata wilayah. Wilayah dengan rata-rata tertinggi dan terendah diidentifikasi, kemudian rasio dan selisihnya dihitung,

$$\text{Rasio}_k = \frac{\max \bar{y}_{gk}}{\min \bar{y}_{gk}} \quad (8)$$

$$\text{Selisih}_k = \max \bar{y}_{gk} - \min \bar{y}_{gk} \quad (9)$$

dengan $\bar{y}_{gk}$ adalah rata-rata komponen k pada wilayah g . Rasio menggambarkan kesenjangan relatif, sedangkan selisih menggambarkan kesenjangan nominal, sehingga keduanya dibaca bersama karena dapat bergerak ke arah yang berbeda ketika nilai komponen di semua wilayah meningkat.

2.9. Perbandingan Ketahanan terhadap Pencilan

Ketahanan keempat uji, yaitu uji F klasik, uji F berbasis peringkat, uji permutasi klasik, dan uji permutasi berbasis peringkat, dinilai dengan dua cara. Cara pertama membandingkan data asli dengan data tanpa pencilan (2025). Kabupaten/kota yang terdeteksi sebagai pencilan dalam kelompok pada Subbab 2.4 dikeluarkan dari data, lalu keempat uji diulang. Statistik uji, nilai- p , dan kesimpulan dibandingkan dengan hasil pada data asli. Suatu uji dianggap robust apabila kesimpulannya tidak berubah setelah pencilan dikeluarkan.

Cara kedua adalah simulasi kontaminasi. Data dibangkitkan dengan *bootstrap* residual dalam kelompok dari data 2025. Residual wilayah ke- i diambil dengan pengembalian dan ditambahkan pada rata-rata keseluruhan serta efek wilayah yang diskalakan dengan faktor δ ,

$$y_{ij}^* = \bar{y} + \delta(\bar{y}_i - \bar{y}) + e_{ij}^* \quad (10)$$

dengan $\bar{y}$ adalah vektor rata-rata keseluruhan, $\bar{y}_i$ adalah vektor rata-rata wilayah ke- i , dan e^*_{ij} adalah residual hasil pengambilan ulang. Nilai $\delta = 0$ berarti tidak ada perbedaan antarwilayah sehingga proporsi penolakan H_0 mengukur laju galat tipe I pada taraf nominal 0,05. Nilai $\delta = 0,4$ mengurangi efek wilayah pada data asli sehingga proporsi penolakan H_0 mengukur kekuatan uji. Simulasi tambahan dengan efek lebih besar ($\delta = 0,6$ dan $\delta = 1$) dijalankan dengan 500 replikasi untuk menelaah perilaku uji ketika perbedaan antarwilayah besar.

Kontaminasi diterapkan pada 0%, 10%, dan 20% pengamatan dalam tiga bentuk. Bentuk pertama adalah kontaminasi acak, yaitu pengamatan digeser sebesar ± 5 simpangan baku (SD) ke arah acak. Bentuk kedua adalah kontaminasi searah, yaitu pengamatan digeser sebesar $+5$ SD. Bentuk ketiga adalah kontaminasi salah kelompok, yaitu pengamatan dipindahkan ke pusat wilayah lain sehingga dapat menimbulkan pemisahan kelompok semu (Bulut, 2026). Kinerja setiap uji dinilai dari proporsi penolakan H_0 pada taraf 0,05 selama 300 replikasi simulasi untuk setiap skenario. Galat baku Monte Carlo untuk proporsi sekitar 0,05 dengan 300 replikasi adalah sekitar 0,013, sehingga perbedaan kecil antarmetode diinterpretasikan dengan hati-hati. Suatu uji dianggap lebih robust apabila proporsi penolakannya tetap dekat 0,05 pada $\delta = 0$ dan kekuatannya tidak turun tajam pada $\delta > 0$ ketika kontaminasi meningkat.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Gambaran Umum Komponen IPM

Analisis menggunakan komponen IPM 33 kabupaten/kota di Sumatera Utara yang dikelompokkan menjadi tiga wilayah geografis: Pantai Timur ($n = 12$), Barat dan Pedalaman ($n = 16$), dan Kepulauan Nias ($n = 5$). Analisis rinci dilakukan pada data 2025, sedangkan data 2023 dan 2024 digunakan sebagai replikasi. Rata-rata dan simpangan baku setiap komponen menurut wilayah disajikan pada Tabel 3 dan Tabel 4.

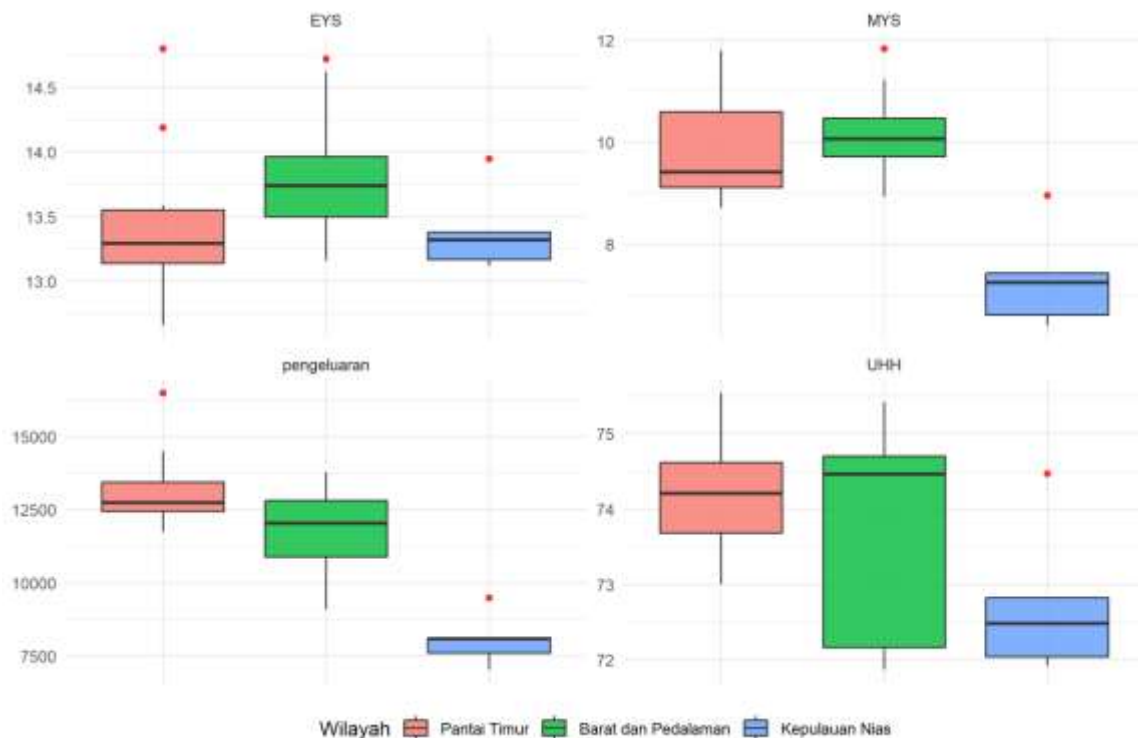
Tabel 3. Rata-rata Komponen IPM menurut Wilayah, 2025

Wilayah	n	UHH	HLS	RLS	Pengeluaran per Kapita
Pantai Timur	12	74,17	13,43	9,84	13.157,42
Barat dan Pedalaman	16	73,75	13,79	10,14	11.806,31
Kepulauan Nias	5	72,75	13,39	7,33	8.062,40

Tabel 4. Simpangan Baku Komponen IPM menurut Wilayah, 2025

Wilayah	n	UHH	HLS	RLS	Pengeluaran per Kapita
Pantai Timur	12	0,71	0,58	1,01	1.267,17
Barat dan Pedalaman	16	1,29	0,44	0,73	1.477,88
Kepulauan Nias	5	1,03	0,33	1,00	904,75

Sebaran setiap komponen menurut wilayah, termasuk pencilan univariat (titik merah), ditampilkan pada Gambar 2, dengan warna kotak mewakili wilayah Pantai Timur, Barat dan Pedalaman, serta Kepulauan Nias.



Gambar 2. Boxplot Komponen IPM menurut Wilayah Geografis, 2025 (EYS = HLS; MYS = RLS; pengeluaran = pengeluaran per kapita; wilayah = wilayah geografis)

Kepulauan Nias memiliki rata-rata terendah pada seluruh komponen, dengan kesenjangan paling menonjol pada rata-rata lama sekolah (RLS) dan pengeluaran per kapita. Sebaliknya, UHH dan HLS relatif seragam antarwilayah. Hal ini sejalan dengan apa yang diukur oleh kedua indikator: RLS mencerminkan capaian pendidikan penduduk dewasa, sedangkan HLS merupakan harapan sehingga cenderung lebih seragam.

3.2. Pencilan Multivariat dan Uji Asumsi

Pencilan dideteksi menggunakan jarak Mahalanobis dengan nilai kritis $\chi^2(0,975; 4) = 11,14$. Pada seluruh data 2025, jarak Mahalanobis klasik hanya menandai Kota Medan (12,05). Jarak robust berbasis *Minimum Covariance Determinant* (MCD) menandai 13 kabupaten/kota, sebagian besar dari Kepulauan Nias. Hal ini menunjukkan bahwa Kepulauan Nias membentuk kelompok yang berbeda dari kelompok lain sehingga tampak jauh dari pusat data secara keseluruhan, bukan mencerminkan kesalahan data. Karena MANOVA membandingkan rata-rata antarkelompok, pencilan lebih tepat dideteksi dalam kelompok menggunakan residual model. Pada 2025, satu-satunya pencilan dalam kelompok adalah Kota Medan (jarak 16,36). Pola selama tiga tahun ditunjukkan pada Tabel 5.

Tabel 5. Jarak Residual Robust Kabupaten/Kota yang Menjadi Pencilan dalam Kelompok

Kabupaten/Kota	2023	2024	2025
Kota Medan	48,08	34,80	16,36
Kota Pematangsiantar	25,87	16,25	6,80
Kota Binjai	23,36	14,89	5,75
Kota Padangsidimpuan	20,58	12,24	4,96
Kota Gunungsitoli	15,17	8,98	4,50
Humbang Hasundutan	12,10	12,70	8,10

Catatan: pengamatan dengan jarak di atas 11,14 ditandai sebagai pencilan.

Kota Medan merupakan pencilan pada ketiga tahun. Selain Medan, Pematangsiantar, Binjai, Padangsidempuan, dan Humbang Hasundutan melampaui nilai kritis pada 2023 dan 2024, sedangkan Gunungsitoli hanya pada 2023. Jarak kota-kota tersebut menurun dari tahun ke tahun; secara deskriptif, kota-kota ini tampak bergerak mendekati pola kelompoknya masing-masing.

Uji Shapiro–Wilk multivariat pada residual menunjukkan pelanggaran normalitas multivariat pada ketiga tahun (2025: $W = 0,8997$, $p = 0,005$; 2024: $p = 0,007$; 2023: $p = 0,013$). Uji Box’s M menunjukkan bahwa homogenitas matriks kovarians terpenuhi pada taraf 5% (2025: $\chi^2 = 29,48$; db = 20; $p = 0,079$), meskipun nilai- p terus menurun dari 0,162 (2023) dan 0,099 (2024) dan mendekati ambang. Korelasi antarkomponen berkisar 0,161 hingga 0,749, tertinggi antara RLS dan pengeluaran ($r = 0,749$), yang tidak menunjukkan multikolinearitas serius. Pelanggaran normalitas mendorong perbandingan MANOVA klasik dengan metode yang tidak bergantung pada asumsi tersebut.

3.3. Hasil MANOVA Klasik dan Alternatif Robust

Hasil keempat statistik uji multivariat untuk data 2025 diberikan pada Tabel 6.

Tabel 6. Hasil MANOVA Klasik, 2025

Statistik Uji	Nilai	F	db	p
Wilks’ Lambda	0,146	10,904	8; 54	$5,45 \times 10^{-9}$
Pillai’s Trace	1,148	9,429	8; 56	$3,88 \times 10^{-8}$
Hotelling–Lawley Trace	3,829	12,444	8; 52	$9,16 \times 10^{-10}$
Roy’s Largest Root	3,201	22,404	4; 28	$2,19 \times 10^{-8}$

Keempat statistik uji menolak H_0 ($p < 0,001$): vektor rata-rata komponen IPM berbeda signifikan antarwilayah geografis. Ukuran efek multivariat (η^2 parsial dari Wilks’ Lambda) sebesar 0,618, yang menunjukkan bahwa perbedaan wilayah menjelaskan porsi besar variasi gabungan komponen IPM.

Uji univariat dengan koreksi Bonferroni ($\alpha^* = 0,05/4 = 0,0125$) menunjukkan perbedaan signifikan pada RLS ($F = 20,12$; $p = 0,001$) dan pengeluaran per kapita ($F = 25,64$; $p = 0,001$), sedangkan UHH ($F = 3,08$; $p = 0,060$) dan HLS ($F = 2,45$; $p = 0,104$) tidak berbeda signifikan. Uji lanjut Tukey HSD menunjukkan bahwa Kepulauan Nias berbeda signifikan dari dua wilayah lain pada RLS (selisih $-2,51$ tahun terhadap Pantai Timur dan $-2,82$ tahun terhadap Barat dan Pedalaman; keduanya $p < 0,001$) dan pada pengeluaran (selisih $-\text{Rp}5,10$ juta dan $-\text{Rp}3,74$ juta; keduanya $p < 0,001$). Pantai Timur dan Barat dan Pedalaman tidak berbeda pada RLS ($p = 0,645$) tetapi berbeda pada pengeluaran per kapita (selisih $\text{Rp}1,35$ juta; $p = 0,034$).

Pendekatan robust berbasis MCD per kelompok tidak dapat diterapkan karena kelompok Kepulauan Nias hanya memiliki lima pengamatan, sama dengan jumlah variabel ditambah satu ($n = p + 1$), yang terlalu kecil bagi algoritma MCD. Sebagai alternatif, digunakan uji Wilks’ Lambda berbasis peringkat beserta uji permutasi (999 permutasi) untuk statistik klasik dan berbasis peringkat, yang tidak bergantung pada normalitas. Pada 2025, uji berbasis peringkat menolak H_0 (Wilks’ Lambda = 0,342; $F(8; 54) = 4,789$; $p = 0,0002$). Uji permutasi juga menolak H_0 (klasik $p = 0,001$; berbasis peringkat $p = 0,002$); perlu dicatat bahwa $p = 0,001$ adalah nilai terkecil yang dapat dicapai dengan 999 permutasi. Seluruh metode menghasilkan kesimpulan yang sama meskipun normalitas dilanggar.

3.4. Konsistensi Tiga Tahun dan Disparitas

Tabel 7 merangkum uji perbedaan antarwilayah untuk 2023–2025.

Tabel 7. Hasil Uji Perbedaan Antarwilayah, 2023–2025

Tahun	Wilks klasik	p (F) klasik	η^2	Wilks peringkat	p peringkat	p permutasi klasik	p permutasi peringkat
2023	0,164	$2,32 \times 10^{-8}$	0,595	0,355	$2,65 \times 10^{-4}$	0,001	0,001
2024	0,156	$1,26 \times 10^{-8}$	0,605	0,339	$1,55 \times 10^{-4}$	0,001	0,001
2025	0,146	$5,45 \times 10^{-9}$	0,618	0,342	$1,75 \times 10^{-4}$	0,001	0,002

Kesimpulan konsisten selama tiga tahun: perbedaan antarwilayah sangat signifikan, dan hanya RLS dan pengeluaran per kapita yang berbeda signifikan pada uji univariat setiap tahun. Ukuran efek multivariat meningkat sedikit (0,595 menjadi 0,618). Nilai Wilks' Lambda klasik dan berbasis peringkat tidak dapat dibandingkan langsung karena berada pada skala berbeda. Disparitas setiap komponen disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8. Disparitas Komponen IPM antarwilayah

Tahun	Komponen	Tertinggi	Wilayah tertinggi	Terendah	Wilayah terendah	Rasio	Selisih
2023	UHH	73,61	Pantai Timur	72,36	Kepulauan Nias	1,017	1,25
2023	HLS	13,64	Barat dan Pedalaman	13,24	Kepulauan Nias	1,030	0,40
2023	RLS	9,92	Barat dan Pedalaman	7,04	Kepulauan Nias	1,410	2,88
2023	Pengeluaran	12.281,08	Pantai Timur	7.281,00	Kepulauan Nias	1,687	5.000,08
2024	UHH	73,86	Pantai Timur	72,55	Kepulauan Nias	1,018	1,31
2024	HLS	13,70	Barat dan Pedalaman	13,28	Kepulauan Nias	1,032	0,43
2024	RLS	10,05	Barat dan Pedalaman	7,20	Kepulauan Nias	1,396	2,85
2024	Pengeluaran	12.715,83	Pantai Timur	7.682,60	Kepulauan Nias	1,655	5.033,23
2025	UHH	74,17	Pantai Timur	72,75	Kepulauan Nias	1,020	1,43
2025	HLS	13,79	Barat dan Pedalaman	13,39	Kepulauan Nias	1,030	0,40
2025	RLS	10,14	Barat dan Pedalaman	7,33	Kepulauan Nias	1,384	2,81
2025	Pengeluaran	13.157,42	Pantai Timur	8.062,40	Kepulauan Nias	1,632	5.095,02

Disparitas terbesar terdapat pada pengeluaran per kapita (wilayah tertinggi sekitar 1,6 kali wilayah terendah) dan RLS (sekitar 1,4 kali), sedangkan UHH dan HLS hampir merata (rasio 1,02–1,03). Rasio pengeluaran dan RLS menyempit sedikit dari 2023 ke 2025, tetapi selisih pengeluaran mutlak melebar dari Rp5,00 juta menjadi Rp5,10 juta. Dengan kata lain, kesenjangan relatif mengecil sementara kesenjangan nominal membesar karena pengeluaran meningkat di semua wilayah.

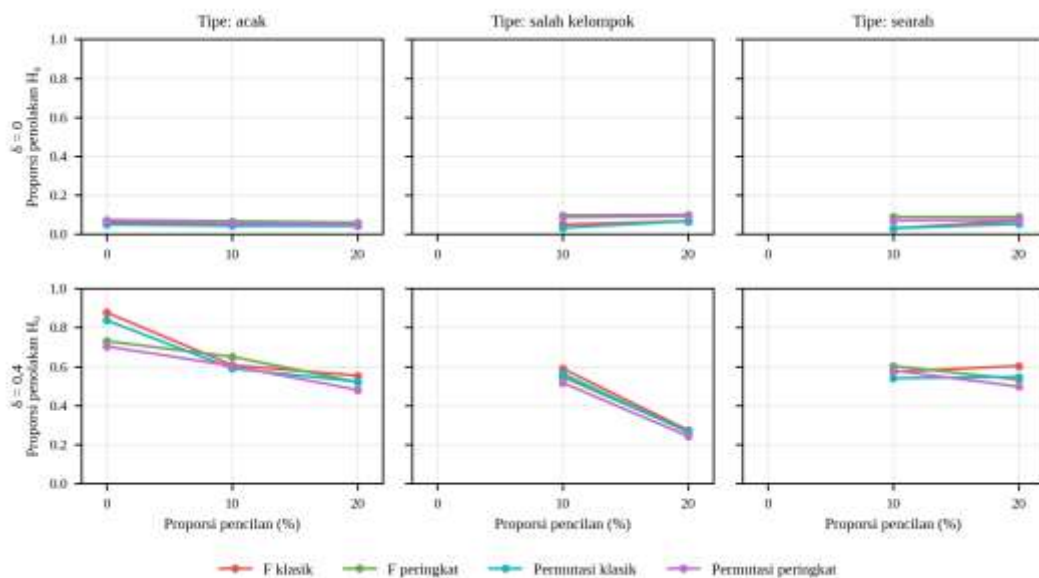
3.5. Perbandingan Ketahanan terhadap Pencilan

Pada perbandingan data asli dan data tanpa pencilan (2025), setelah Kota Medan sebagai satu-satunya pencilan dalam kelompok pada 2025 dikeluarkan ($n = 32$), Wilks' Lambda klasik berubah dari 0,146 menjadi 0,144, dan Wilks' Lambda berbasis peringkat dari 0,342 menjadi 0,320. Nilai- p tetap sangat kecil pada semua uji (klasik $5,45 \times 10^{-9}$ menjadi $1,08 \times 10^{-8}$; berbasis peringkat $1,75 \times 10^{-4}$ menjadi $1,29 \times 10^{-4}$; seluruh nilai- p permutasi = 0,001). Dengan demikian, kesimpulan tidak bergantung pada keberadaan Medan.

Pada simulasi kontaminasi, data dibangkitkan dengan *bootstrap* residual dalam kelompok dari data 2025 (Subbab 2.9), dengan efek wilayah diskalakan oleh faktor δ ($\delta = 0$: tidak ada perbedaan wilayah, untuk mengukur laju galat tipe I; $\delta = 0,4$: efek berkurang, untuk mengukur kekuatan uji). Kontaminasi diterapkan pada 0%, 10%, dan 20% pengamatan dalam tiga bentuk: acak (pergeseran ± 5 SD ke arah acak), searah (pergeseran +5 SD), dan salah kelompok (pengamatan dipindahkan ke pusat wilayah lain). Proporsi penolakan H_0 disajikan pada Tabel 9, dan pola yang sama ditunjukkan secara visual pada Gambar 3.

Tabel 9. Proporsi Penolakan H_0 pada Simulasi

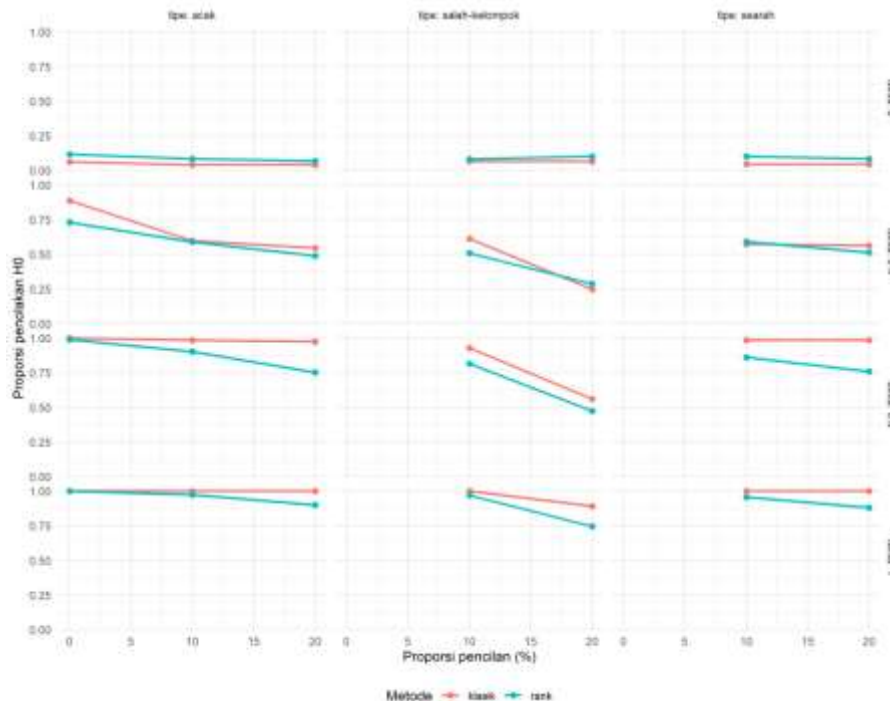
δ	Kontaminasi	Proporsi pencilan	F klasik	F peringkat	Permutasi klasik	Permutasi peringkat
0	acak	0	0,063	0,073	0,050	0,073
0	acak	0,1	0,047	0,067	0,043	0,060
0	searah	0,1	0,030	0,090	0,030	0,070
0	salah kelompok	0,1	0,050	0,097	0,033	0,087
0	acak	0,2	0,043	0,060	0,043	0,050
0	searah	0,2	0,070	0,090	0,053	0,073
0	salah kelompok	0,2	0,067	0,100	0,067	0,093
0,4	acak	0	0,877	0,730	0,837	0,703
0,4	acak	0,1	0,607	0,650	0,590	0,603
0,4	searah	0,1	0,573	0,603	0,540	0,580
0,4	salah kelompok	0,1	0,590	0,547	0,563	0,517
0,4	acak	0,2	0,553	0,520	0,523	0,480
0,4	searah	0,2	0,603	0,533	0,547	0,497
0,4	salah kelompok	0,2	0,273	0,267	0,263	0,243



Gambar 3. Proporsi Penolakan H_0 menurut Proporsi dan Tipe Pencilan

Tiga temuan utama muncul dari simulasi. Pertama, untuk laju galat tipe I ($\delta = 0$), uji klasik (0,030–0,070) dan uji permutasi klasik (0,030–0,067) berada di sekitar taraf nominal 0,05, sedangkan uji berbasis peringkat cenderung terlalu mudah menolak H_0 (0,060–0,100; permutasi berbasis peringkat 0,050–0,093). Kedua, tanpa kontaminasi, uji klasik jelas lebih kuat daripada uji berbasis peringkat (0,877 berbanding 0,730). Ketiga, kontaminasi menurunkan kekuatan semua metode, dan perbedaan antarmetode pada skenario terkontaminasi kecil serta tidak konsisten arahnya (uji berbasis peringkat sedikit lebih tinggi pada pencilan acak dan searah 10%, sedangkan uji klasik lebih tinggi pada pencilan searah 20%), sehingga belum ada bukti cukup bahwa salah satu metode lebih tahan. Pencilan salah kelompok sebesar 20% paling merusak, menurunkan kekuatan kedua metode hingga sekitar 0,27.

Pada simulasi tambahan dengan efek lebih besar ($\delta = 0,6$ dan 1 ; $B = 500$; Gambar 4), uji klasik mempertahankan kekuatan mendekati 1 pada penciran acak dan searah hingga 20% (0,974–1,000), sedangkan uji berbasis peringkat menurun. Salah satu kemungkinan alasannya adalah transformasi peringkat membuang informasi tentang besarnya nilai data sehingga melemahkan kekuatan uji ketika perbedaan kelompok besar, seperti pada data ini; dugaan ini tidak diuji secara terpisah dalam penelitian ini.



Gambar 4. Proporsi Penolakan H_0 Uji F Klasik dan Berbasis Peringkat pada Berbagai Ukuran Efek

Untuk data komponen IPM Sumatera Utara, MANOVA klasik tetap valid dan relatif tahan terhadap penciran meskipun asumsi normalitas dilanggar. Alasan utamanya adalah ukuran efek yang besar: perbedaan antarwilayah, terutama untuk Kepulauan Nias, cukup besar sehingga penciran tambahan tidak menutupinya. Kesimpulan yang sama diperoleh dari uji berbasis peringkat dan uji permutasi, serta dari data asli maupun data tanpa penciran. Hasil ini menunjukkan bahwa metode robust tidak selalu memberikan keunggulan; manfaatnya bergantung pada ukuran efek serta jenis dan proporsi penciran. Penciran yang ditemukan pada data nyata, yaitu kota-kota besar yang capaian pendidikan dan pengeluarannya menonjol, tidak mengubah kesimpulan.

4. Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa empat komponen IPM, yaitu umur harapan hidup, harapan lama sekolah, rata-rata lama sekolah, dan pengeluaran riil per kapita yang disesuaikan, berbeda signifikan antara wilayah Pantai Timur, Barat dan Pedalaman, serta Kepulauan Nias di Sumatera Utara pada 2023–2025. MANOVA klasik menghasilkan hasil yang sangat signifikan pada setiap tahun (Wilks' Lambda = 0,146 dan η^2 parsial = 0,618 pada 2025). Perbedaan terutama didorong oleh rata-rata lama sekolah dan pengeluaran per kapita, dengan Kepulauan Nias jelas terendah, sedangkan umur harapan hidup dan harapan lama sekolah relatif seragam. Selama tiga tahun, kesenjangan relatif pengeluaran dan pendidikan menyempit sedikit, tetapi kesenjangan nominal pengeluaran melebar dari Rp5,00 juta menjadi Rp5,10 juta. Normalitas multivariat dilanggar pada ketiga tahun dan Kota Medan menjadi penciran dalam kelompok yang konsisten. Meskipun demikian, uji Wilks' Lambda berbasis peringkat, uji permutasi klasik dan berbasis peringkat, serta analisis tanpa Kota Medan menghasilkan kesimpulan yang sama dengan MANOVA klasik. Simulasi menunjukkan bahwa uji klasik tetap dekat dengan laju galat tipe I nominal dan tetap kuat pada kondisi kontaminasi, sedangkan uji berbasis peringkat cenderung terlalu mudah menolak H_0 dan kehilangan kekuatan ketika perbedaan wilayah besar. Dengan demikian, metode robust tidak selalu memberi keunggulan; manfaatnya bergantung pada ukuran efek serta jenis dan proporsi penciran. Beberapa persoalan masih terbuka. MANOVA robust per kelompok berbasis *Minimum Covariance Determinant* tidak dapat diterapkan

karena kelompok Kepulauan Nias hanya memiliki lima pengamatan. Ketergantungan spasial antarkabupaten/kota yang berdekatan tidak dimodelkan, dan penjelasan penurunan kekuatan uji berbasis peringkat tidak diuji secara terpisah. Penelitian selanjutnya dapat menggunakan klasifikasi wilayah yang lebih rinci, memasukkan ketergantungan spasial, mengevaluasi ukuran efek yang lebih kecil, dan memperluas perbandingan ke provinsi lain atau deret waktu yang lebih panjang.

Reference

1. Alsalman, M., Alraeesi, M., & Alzaatreh, A. (2025). Multivariate analysis of energy and solar performance across Dubai: Insights from MANOVA and cluster analysis. *Scientific Reports*, 15(1), Article 24526. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-09730-4>
2. Ameen, A. A., & Abbas, O. H. (2022). On compare robust Wilks' statistics for the one-way MANOVA: A simulation study and application. *Journal of Statistics Applications & Probability*, 11(2), Article 15. <https://doi.org/10.18576/jsap/110215>
3. Amro, L., Konietzschke, F., & Pauly, M. (2024). Incompletely observed nonparametric factorial designs with repeated measurements: A wild bootstrap approach. *Biometrical Journal*, 66(8). <https://doi.org/10.1002/bimj.70008>
4. Badan Pusat Statistik Kabupaten Nias Barat. (2024). *Indeks Pembangunan Manusia Kabupaten Nias Barat 2024*. BPS Kabupaten Nias Barat.
5. Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara. (2025a). *Indeks Pembangunan Manusia (IPM) Sumatera Utara tahun 2025* (Berita Resmi Statistik No. 70/11/12/Th. XXVIII). BPS Provinsi Sumatera Utara. <https://sumut.bps.go.id>
6. Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara. (2025b). *Indeks Pembangunan Manusia Provinsi Sumatera Utara 2024*. BPS Provinsi Sumatera Utara.
7. Baumeister, M., Ditzhaus, M., & Pauly, M. (2024). Quantile-based MANOVA: A new tool for inferring multivariate data in factorial designs. *Journal of Multivariate Analysis*, 199, Article 105246.
8. Bu, D., Yan, J., Yang, W., Zhang, X., & Li, Q. (2026). Ensemble test for microbiome data. *Microbiome*, 14(1). <https://doi.org/10.1186/s40168-026-02367-z>
9. Bulut, H. (2025). A novel robust test to compare covariance matrices in high-dimensional data. *Axioms*, 14(6), Article 427. <https://doi.org/10.3390/axioms14060427>
10. Bulut, H. (2026). A robust high-dimensional MANOVA test based on weighted MRCD estimation. *Mathematics*, 14(16), Article 2922. <https://doi.org/10.3390/math14162922>
11. Furr, R. M. (2026). A largely univariate framework for understanding multivariate analysis of variance. *Psychological Methods*, 31(3), 501–515. <https://doi.org/10.1037/met0000819>
12. Geroldinger, M., Laimer, M., Wally, V., Bauer, J. W., & Zimmermann, G. (2026). A neutral comparison of multivariate hypothesis tests for parallel group designs in rare disease settings. *Statistics in Medicine*, 45(20). <https://doi.org/10.1002/sim.70735>
13. Hartanto, S., Adzan, M. S., Haq, D. Z., & Novitasari, D. C. R. (2024). Analysis of the Human Development Index in East Java in 2022–2023 based on indicators using the Fuzzy C-Means method. *INTEK: Jurnal Informatika dan Teknologi Informasi*, 7(2), 45–54.
14. Nurlina, N., Ridha, A., & Asnidar, A. (2023). Determinant analysis of the Human Development Index in Indonesia in 1990–2021. *Jurnal Samudra Ekonomi dan Bisnis*, 14(2), 239–250.
15. R Core Team. (2025). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>
16. Raji, I. A., Abbas, N., Abujija, M. A. R., & Riaz, M. (2021). Robust multivariate Shewhart control chart based on Stahel–Donoho robust estimator and Mahalanobis distance for multivariate outlier detection. *Mathematics*, 9(21), Article 2772.
17. Sabbioni, E., Agostinelli, C., & Farcomeni, A. (2025). A regularized MANOVA test for semicontinuous high-dimensional data. *Biometrical Journal*, 67(3). <https://doi.org/10.1002/bimj.70054>
18. Sofia, A. D. (2023). District/city grouping based on the 2022 Human Development Index indicators using K-Harmonic Means clustering. *Journal of Statistical Research*, 163–172.
19. United Nations Development Programme. (2025). *Human development report 2025: A matter of choice: People and possibilities in the age of AI*. UNDP. <https://hdr.undp.org/content/human-development-report-2025>